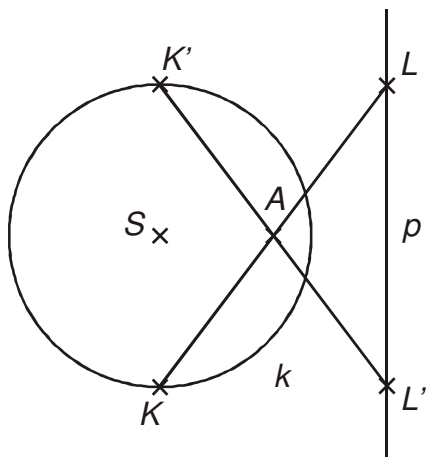


3.4.5 Příklady na středovou souměrnost

Předpoklady: 030404

Př. 1: Je dána kružnice $k(S; 3\text{ cm})$, bod A ; $|SA| = 2\text{ cm}$ a přímka p ; $|Ap| = 4\text{ cm}$, která nemá s kružnicí k žádný společný bod. Najdi všechny úsečky KL ; $K \in k$, $L \in p$ takové, aby bod A byl jejich středem.

Náčrtek:



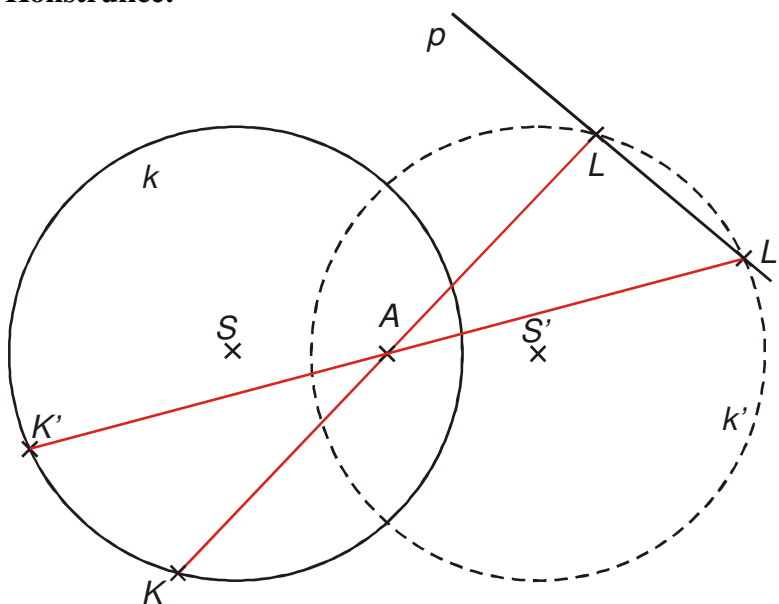
Problém:

- Bod K leží na kružnici k , ale nevíme kde,
- Bod L leží na přímce p , ale nevíme kde,

$\Rightarrow$ máme dvě neúplné informace $\Rightarrow$ hledáme spojitost mezi body K a L .

Řešení: Body K, L jsou středově souměrné se středem souměrnosti v bodu A (leží na jedné přímce a platí $|KA| = |LA|$) $\Rightarrow$ vezmeme všechny body, které mohou být K (celou kružnici k), a zobrazíme je ve středové souměrnosti $S(A)$. Správný bod se zobrazí na bod L (tedy na bod na přímce p).

Konstrukce:



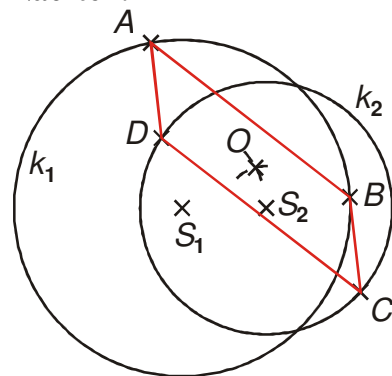
Zápis konstrukce:

1. $k; k(S, r = 3\text{ cm})$
2. $A; |SA| = 2\text{ cm}$
3. $p; |pA| = 4\text{ cm}$
4. $k'; S(A): k \rightarrow k'$
5. $L, L'; L \cup L' = k' \cap p$
6. $K; K = k \cap \leftrightarrow LA$
7. $K'; K' = k \cap \leftrightarrow L'A$
8. $K'L'; KL$

Rozbor:

Příklad má žádné, jedno nebo dvě řešení podle počtu průsečíků kružnice k' s přímkou p .

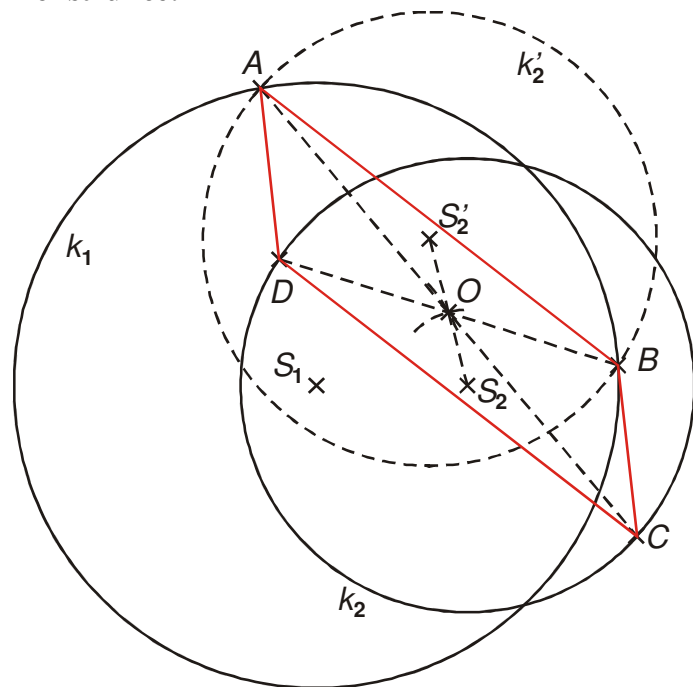
Př. 2: Jsou dány dvě kružnice $k_1 (S_1; 4 \text{ cm})$ a $k_2 (S_2; 3 \text{ cm})$, $|S_1 S_2| = 2 \text{ cm}$. Uvnitř obou kružnic leží bod O , $|S_1 O| = 2 \text{ cm}$, $|S_2 O| = 1 \text{ cm}$. Sestroj všechny rovnoběžníky $ABCD$ tak, aby platilo $A \in k_1$, $B \in k_1$, $C \in k_2$, $D \in k_2$ a bod O je střed $ABCD$.

Náčrtek:**Problém:**

- Body A, B leží na kružnici k_1 , ale nevíme kde,
- Body C, D leží na kružnici k_2 , ale nevíme kde,

$\Rightarrow$ máme dvě neúplné informace $\Rightarrow$ hledáme spojitost mezi body.

Řešení: Body A, C leží s bodem O na jedné přímce (úhlopříčce rovnoběžníku), platí $|AO| = |CO|$ (úhlopříčky v rovnoběžníku se půlí) $\Rightarrow$ body A, C jsou středově souměrné se středem souměrnosti v bodu $O \Rightarrow$ vezmeme všechny body, které mohou být C (celou kružnici k_2), a zobrazíme je ve středové souměrnosti $S(O)$. Správný bod se zobrazí na bod A (tedy na bod na kružnici k_2).

Konstrukce:**Zápis konstrukce:**

1. $k_1; k_1 (S_1, r_1 = 4 \text{ cm})$
2. $k_2; k_2 (S_2, r_2 = 3 \text{ cm}), |S_1 S_2| = 2 \text{ cm}$
3. $O; |S_1 O| = 2 \text{ cm}, |S_2 O| = 1 \text{ cm}$
4. $k'_2; S(O): k_2 \rightarrow k'_2$
5. $A, B; A \cup B = k'_2 \cap k_1$
6. $C; C = k_2 \cap \leftrightarrow AO$
7. $D; D = k_2 \cap \leftrightarrow BO$
8. $ABCD$

Rozbor:

Příklad má žádné nebo jedno řešení podle počtu průsečíku kružnic k_1 s kružnicí k'_2 .

Dodatek: Samozřejmě můžeme zobrazovat i ve středové souměrnosti kružnici k_1 . Obrázek by však byl o dost větší.

Pedagogická poznámka: Je dobré připomenout, že předchozí příklad je velmi podobný prvnímu příkladu.

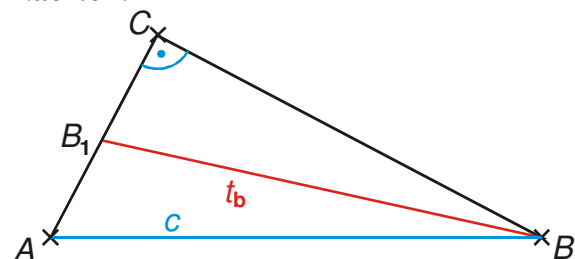
Př. 3: (BONUS) Rozhodni, jaké podmínky by zadání předchozího příkladu muselo splňovat, aby nalezený rovnoběžník byl pravoúhelník.

Rovnoběžník je pravoúhelníkem $\Rightarrow$ obě úhlopříčky jsou shodné (vyplývá se shodnosti trojúhelníků ABC a BAD).

Bod O je středem rovnoběžníku $\Rightarrow$ bod O je průsečíkem úhlopříček rovnoběžníku $\Rightarrow$ trojúhelníky AOB a COD jsou rovnoramenné a tedy i osově souměrné podle přímky $S_{AB}S_{CD}$ (na které leží i bod O) $\Rightarrow$ celý obrázek musí být souměrný podle přímky $S_{AB}S_{CD} \Rightarrow$ na této přímce leží i středy S_1, S_2 kružnic k_1, k_2 .

Pokud má být nalezený rovnoběžník pravoúhelníkem, musí bod O ležet na přímce S_1S_2 .

Př. 4: Je dána úsečka BB_1 , $|BB_1| = 5 \text{ cm}$. Sestroj všechny pravoúhlé trojúhelníky s pravým úhlem γ , tak aby úsečka BB_1 byla jejich těžnicí t_B a platilo $c = 6 \text{ cm}$.

Náčrtek:

Úloha je polohová.

Problém: Pro oba hledané vrcholy máme pouze jedinou informaci:

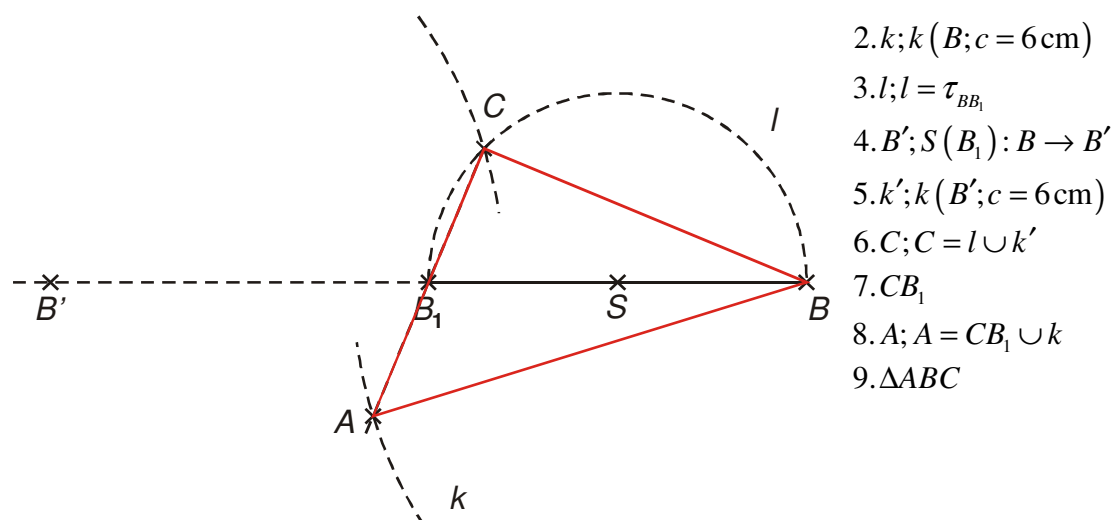
- vrchol A leží na kružnici $k(B; c)$, ale nevíme kde,
- vrchol C leží na kružnici $l\left(S_{BB_1}; \frac{|BB_1|}{2}\right)$ (Thaletova kružnice), ale nevíme kde,

$\Rightarrow$ máme dvě neúplné informace $\Rightarrow$ hledáme spojitost mezi body A, C .

Řešení: Bod B_1 je středem úsečky $AC \Rightarrow$ body A, C jsou středově souměrné podle bodu $B_1 \Rightarrow$ zobrazíme všechny body, které mohou být A (kružnici $k(B; c)$) v $S(B_1)$, bod C najdeme jako průsečík kružnic $k'(B'; c)$ a $l\left(S_{BB_1}; \frac{|BB_1|}{2}\right)$.

Konstrukce:**Zápis konstrukce:**

1. $BB_1; |BB_1| = t_b = 5 \text{ cm}$



2. $k; k(B; c = 6 \text{ cm})$
3. $l; l = \tau_{BB_1}$
4. $B'; S(B_1): B \rightarrow B'$
5. $k'; k(B'; c = 6 \text{ cm})$
6. $C; C = l \cap k'$
7. CB_1
8. $A; A = CB_1 \cap k$
9. $\triangle ABC$

Rozbor: Úloha má v jedné polorovině jedno řešení.

Př. 5: Najdi společný rys všech tří předchozích konstrukčních příkladů v této hodině. Řešili jsme podobné příklady i pomocí osové souměrnosti?

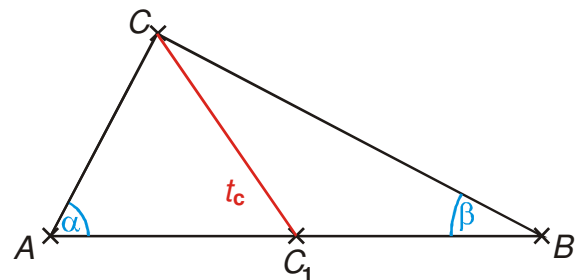
Ve všech předchozích příkladech jsme u hledaných bodů znali málo informací (leží na kružnici, leží na přímce) $\Rightarrow$ hledali jsme vztah mezi dvěma body (středovou souměrnost) $\Rightarrow$ zobrazením množiny „podezřelých bodů“ se nám podařilo „spojit“ neúplné informace o dvou bodech dohromady a jeden z hledaných bodů sestrojil.

Stejný typ příkladů se vyskytoval i u osové souměrnosti (první dva příklady v hodině 030503).

Shodná zobrazení nám umožňují „spojit neúplné informace“ o dvou bodech a tím tyto body zkonstruovat.

Př. 6: Je dána úsečka CC_1 , $|CC_1| = 5 \text{ cm}$. Sestroj všechny trojúhelníky v nichž CC_1 je těžnicí a platí $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

Náčrtek:



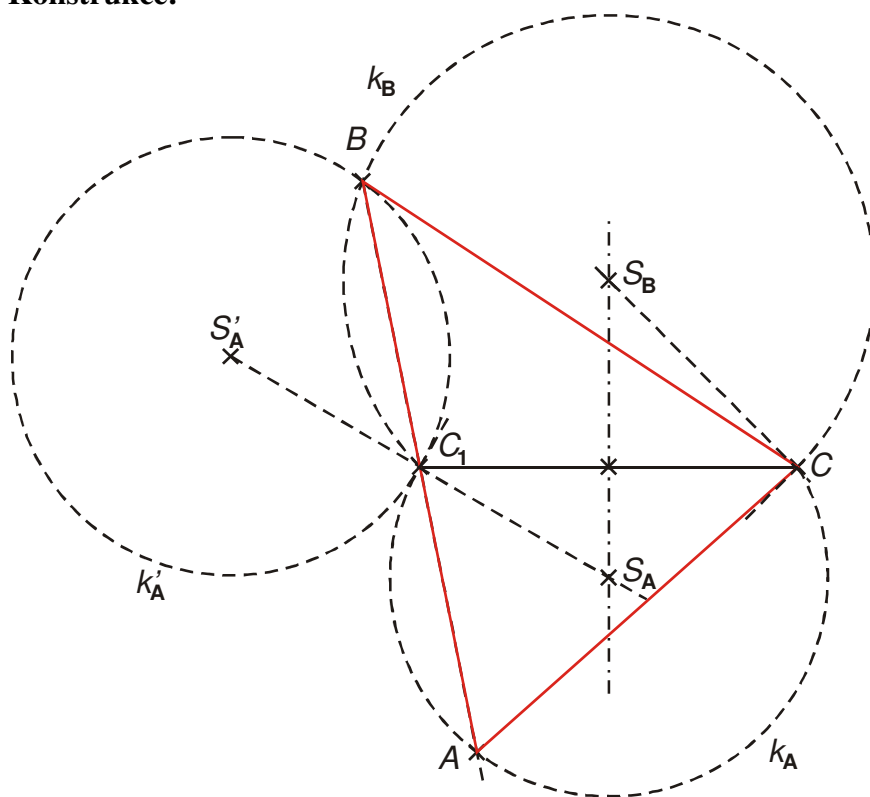
Úloha je polohová.

Problém: Pro oba hledané vrcholy máme pouze jedinou informaci:

- vrchol A leží na množině bodů, ze kterých je úsečka CC_1 vidět pod úhlem $\alpha = 60^\circ$, ale nevíme kde,
- vrchol B leží na množině bodů, ze kterých je úsečka CC_1 vidět pod úhlem $\beta = 45^\circ$, ale nevíme kde,

$\Rightarrow$ máme dvě neúplné informace $\Rightarrow$ hledáme spojitost mezi body A, B .

Konstrukce:


$$1. CC_1; |CC_1| = t_c = 5 \text{ cm}$$

- Rozbor:** Úloha má v jedné polorovině jedno řešení.

Proto nekreslíme množiny bodů celé (další řešení bychom nezískali) a značíme je podle vrcholů, k jejichž nalezení mají sloužit.

Př. 7: Petáková:
strana 79/cvičení 37
strana 80/cvičení 48 a) d)

Shrnutí: Pomocí středové souměrnosti můžeme „spojovat neúplné informace“ o dvou bodech a tím je konstruovat.